Элементы математического анализа

*студента(ки)*______*курса*__________________________*факультета*

____

____

*группы №*______

*направления*____

____

Ставрополь
2017

ГЛАВА 1 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1 Числовая последовательность и ее предел

Определение 1. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1,2,3,...,n,...$ поставлено в соответствие действительное число u_n, то множество действительных чисел $u_1,u_2,u_3,...,u_n,...$ называется числовой последовательностью и обозначается $\{u_n\}$.

Числа $u_1,u_2,u_3,...,u_n,...$ называются элементами последовательности. u_n – общий член последовательности.

Последовательность $\{u_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M, что для любого ее элемента u_n выполняется неравенство:

$$u_n \le M \qquad (u_n \ge M).$$

Последовательность $\{u_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу.

Определение 2. Число a называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что для $n > N$ выполняется неравенство:
$|u_n - a| < \varepsilon$.

Символическая запись $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Последовательность, имеющую предел, называют сходящейся.

Неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенству $a-\varepsilon < u_n < a+\varepsilon$, которое означает, что все элементы последовательности $\{u_n\}$, номера которых $n > N$, находятся в ε – окрестности точки a.

Теорема 1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 3. Алгебраическая сумма, произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен соответственно алгебраической сумме, произведению пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \pm \lim_{n\to\infty} v_n;$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Теорема 4. Частное двух сходящихся последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов этих последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}.$$

Теорема 5. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пример. Доказать, что последовательность $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},...,\frac{n}{2n+1},...$ при $n\to\infty$ имеет пределом число $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть ε – произвольное положительное число. Требуется доказать, что существует такое число $N=N(\varepsilon)$, что при $n>N$ выполняется неравенство:

$$\left|u_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Найдем $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|-\frac{1}{2(2n+1)}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}$.

Таким образом, неравенство $\left|u_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ выполняется, если $\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$, откуда $2(2n+1)\varepsilon>1$ или $n>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

В качестве числа N можно взять целую часть числа $\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$.

Зададим $\varepsilon=\frac{1}{40}$, тогда $n>\frac{1}{4\cdot\frac{1}{40}}-\frac{1}{2}=19\frac{1}{2}$.

Следовательно, начиная с номера $n=20$, будет выполняться неравенство $\left|u_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, то есть, $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{40}$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

1.2 Предел функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0\in X$ или $x_0 \overline{\in} X$. Возьмем из множества X последовательность $x_1,x_2,...,x_n,...$, элементы которой отличны от x_0 $(x_n\neq x_0)$, сходящуюся к x_0. Последовательность функции $f(x_1),f(x_2),...,f(x_n),...$ тоже образуют числовую последовательность.

Определение 1. Число А называется пределом функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ (или при $x\to x_0$), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу А.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Функция $y = f(x)$ в точке x_0 может иметь только один предел.

Определение 2. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0 так, что x принимает только значения, меньшие x_0, то число A_1 называется левым пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или $f(x_0 - 0) = A_1$.

Аналогично определяется правый предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0, при $x > x_0$:

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ или $f(x_0 + 0) = A_2$.

Если левый и правый пределы функции $y = f(x)$ существуют и равны, то есть $A_1 = A_2 = A$, то число А есть предел этой функции в точке x_0, то есть, если:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A, \text{ то } \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Определение 3. Число А называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = B$, то функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ и $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеют в точке x_0 пределы равные соответственно $A \pm B$; $A \cdot B$ *и* $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Теорема 2. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) \right]^n$.

Теорема 3 . $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C = C$.

Теорема 4 . $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} C f(x) = C \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$.

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ – имеет предел в данной точке x_0. Тогда она ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 6. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $q(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, за исключением может быть, самой точки x_0, и для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq q(x) \leq \varphi(x)$. Пусть, кроме того $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} q(x) = A$.

1.3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$.

Определение 2. Функции $f(x)$ называется бесконечно малой в точке $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Теорема. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, являются бесконечно малыми функциями при $x \to x_0$.

Теорема о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ имела пределом число А, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - A$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.

Деление одной бесконечно малой функции на другую может привести к различным результатам.

Пусть $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \alpha(x) = 0, \quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \beta(x) = 0.$

1) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

2) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка.

3) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Важнейшие эквивалентности

1) $\sin x \sim x$;

2) $\operatorname{tg} x \sim x$;

3) $\arcsin x \sim x$;

4) $\operatorname{arctg} x \sim x$;

5) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;

6) $e^x - 1 \sim x$;

7) $a^x - 1 \sim x$;

8) $\ln(1+x) \sim x$;

9) $\log_a(1+x) \sim x \log_a e$;

10) $(1+x)^k - 1 \sim kx$;

(в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$).

4) Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая n-го порядка относительно $\beta(x)$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству, $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. В этом случае записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Аналогично определяется бесконечно большая функция при $x \to \infty$.

Теорема о связи между бесконечно малой и бесконечно большой функциями.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой. Функция обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

1.4 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

1.5 Вычисление пределов

При вычислении предела функции $y = f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$ является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции $f(x)$ при $x \to x_0$, где x_0 входит в область её определения, равен частному значению функции при $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена, или же вычисляется предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ или при $x \to \infty$ представляет собой неопределённость типа «$\frac{0}{0}$»; «$\frac{\infty}{\infty}$»; «$0 \cdot \infty$»; «$\infty - \infty$»; «1^{∞}»; «0^0»; «∞^0».

Решение типовых примеров

Задача 1. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 1\right) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)}$.

Решение.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)} = \frac{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3}{loq_2\left[(-1)^2 + 1\right]} = \frac{-7}{loq_2 2} = -7$$

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

4

$$=-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Функция $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в точке $x=2$ не определена. Так как при $x=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, так как $x^2-5x+6=0$ при $x_1=2,\quad x_2=3$.

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, так как $x^2-3x+2=0$ при $x_1=2,\quad x_2=1$.

Итак, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

Решение. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3-\sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3+\sqrt{x+6}$, получим

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$ {перемножив сопряженные выражения, избавимся от иррациональности в числителе} =

$$=\lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\frac{1}{3+\sqrt{3+6}}=-\frac{1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{x+6}-2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+6-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\frac{1}{-4\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{4\left(2+2\right)}=-\frac{1}{16}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x+1-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x+3-4\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+3}+2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}}=\frac{2+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+1\right)=\infty;\quad \lim_{x\to\infty}\left(3x^2+2x-1\right)=\infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида «$\dfrac{\infty}{\infty}$». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. В заданном примере имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

10. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{3+x-2}{9-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{1+x}{9-x^2}=\infty.$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=8\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot 1=8$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$.

Решение. В данном примере имеем неопределенность вида «1^∞». Для его вычисления используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=e^{6}.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 4x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}\cdot\cos 0=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}.$$

При вычислении этого предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin x\sim x$ при $x\to 0$. Следовательно, $\sin 3x\sim 3x$ и $\sin 4x\sim 4x$ при $x\to 0$. Затем бесконечно малые функции в числителе и в знаменателе заменили эквивалентными им функциями.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида « 1^{∞}». Для вычисления предела используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}\cdot(1-5x)^{2}=$

$$=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}\cdot(-5)}\cdot 1=\left[\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\right]^{-5}=e^{-5}.$$

Вычислить односторонние пределы:

16. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$.

Решение. Пусть $x<2$, тогда при $x\to 2-0$ функции $x-2$ и $(x-2)^{3}$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{(x-2)^{3}}=-\infty.$$

При $x>2$ функции $x-2$ и $(x-2)^{3}$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$ – положительная бесконечно большая функция.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4}{(x-2)^3}=+\infty$.

17. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. При $x\to 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\dfrac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1.$$

При $x\to 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\dfrac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

Задания для решения в аудитории

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-8x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2+10}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5x-6}{3x^2+7x-x^3-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

10. $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+4}\right)^{4x+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tgx\right)^{ctgx}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{3x^2-8x-3}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot ctg5x$

1.6 Непрерывность функции

а) Определение непрерывности функции в точке

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции и ее значение в этой точке равны, то есть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, так как $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

Таким образом, для непрерывной функции можно менять знак функции и знак предела.

Из определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 следует:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$$

или

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

Определение 2. (на языке «$\varepsilon-\delta$»). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству:

$$|x-x_0|<\delta$$

выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Разность $x-x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается $\Delta x=x-x_0$.

Разность $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0 и обозначается

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0) \text{ или } \Delta y=f(x)-f(x_0).$$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции в этой точке, то есть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Теорема 1. Все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Теорема 2. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции в точке x_0, то функции $f(x)\pm\varphi(x)$; $f(x)\cdot\varphi(x)$; $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывны в точке x_0 (последняя при условии, что $\varphi(x_0)\neq 0$).

Теорема 3. Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .

Функция $f(x)$ называется непрерывной на $[a,b]$, если она непрерывна в каждой его точке.

б) Точки разрыва функции

Определение 1. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если эта функция не является непрерывной в точке x_0 .

Определение 2. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если в этой точке существуют односторонние пределы. Разрывы первого рода делятся на два вида: скачки и устранимые разрывы.

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют, но не равны, то в точке x_0 функция имеет скачок:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

или

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0).$$

Если односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0 существуют и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет устранимый разрыв:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$

или

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0).$$

Задания для решения в аудитории

1. Показать, что при $x \to 4$ функция $y = \dfrac{x^2-16}{x-4}$ имеет разрыв.

2. Исследовать функцию на непрерывность и найти точки разрыва.

а) $y = \dfrac{1}{x-3}$.

б) $y = \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

в) $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

г) $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-6)}$.

ГЛАВА 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1 Производная функции

Определение 1. Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции $\triangle f(x)$ в этой точке к приращению аргумента $\triangle x$, при условии, что $\triangle x \to 0$.

Обозначение производной функции $y = f(x)$

$$f'(x), y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}.$$

По определению:

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

или

$$y' = \lim_{x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} \quad y' = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операцию нахождения производной называют дифференцированием.

Основные правила и формулы дифференцирования

1.	$(u+v-w)' = u'+v'-w'$	
2.	$(uv)' = u'v + v'u$	
3.	$(cu)' = cu'$	
4.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$c' = 0, \quad c = const$
5.	$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$	$x' = 1$
6.	$(u^a)' = au^{a-1}\cdot u'$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
7.	$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}; \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8.	$(a^u)' = a^u\cdot \ln a\cdot u'$	$(a^x)' = a^x\cdot \ln a$
9.	$(e^u)' = e^u\cdot u'$	$(e^x)' = e^x$
10.	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

11.	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$
12.	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$	$\left(\sin x\right)' = \cos x$
13.	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$	$\left(\cos x\right) = -\sin x$
14.	$\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\left(\mathrm{tg}\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
15.	$\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$\left(\mathrm{ctg}\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
16.	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18.	$\left(\mathrm{arc\,tg}\, u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	$\left(\mathrm{arc\,tg}\, x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
19.	$\left(\mathrm{arc\,ctg}\, u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\left(\mathrm{arc\,ctg}\, x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Решение типовых примеров

Найти производные от функций:

а) Производные элементарных функций

Пример 1. $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

Решение.

$$y' = 15x^2 - 4x + 3$$

Пример 2. $y = 2\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x^2}$

Решение. Перепишем заданное выражение, используя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-2}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$$

Пример 3. $y = x^3 \cos x$

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$y' = (x^3)'\cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

Пример 4. $y = \dfrac{arctgx}{x^3}$

Решение. Применим правило дифференцирования дроби:

$$y' = \frac{(arctgx)'x^3 - arctgx(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{x^3 \cdot \dfrac{1}{1+x^2} - arctgx \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x - 3(1+x^2)arctgx}{x^4(1+x^2)}$$

б) *Производные сложных функций*

Пример 5. $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$.

Решение. Вводим вспомогательную функцию $u = x^2 + 3x + 1$, тогда можно записать $y = \sqrt{u}$, зная, что:

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, получим $y' = \dfrac{(x^2 + 3x + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$

Пример 6. $y = (x^2 + 5x + 7)^8$

Решение. Пусть $u = x^2 + 5x + 7$, тогда $y = u^8$, $y' = 8u^7 \cdot u'$

$u' = 2x + 5$

$y = 8(x^2 + 5x + 7)^7 (2x + 5)$

Задания для решения в аудитории

Найти производную заданной функции:

1. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$

2. $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$

3. $y = x^2 ctgx$

4. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

6. $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$

7. $y = \ln(arctgx)$

8. $y = e^{\arcsin x}$

9. $y = \sin^3 x$

10. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$

2.2 Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) от функции $y = f(x)$ называется производная от её производной $y' = f'(x)$, то есть:

$$y'' = \left[f'(x) \right]'$$

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от её $(n-1)$-ой производной:

$$y^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'.$$

Обозначения y'', $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$; $y^{(n)}$; $\dfrac{d^n y}{dx^n}$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти производную 2-го порядка от функции $y = \sin^2 x$.

Решение.

$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x \qquad y'' = 2\cos 2x$

Пример 2. Найти производную третьего порядка функции $y = x \ln 2x$.

Решение.

Продифференцируем эту функцию трижды:

$y' = \ln 2x + x \cdot \dfrac{2}{2x} = \ln 2x + 1$;

$y'' = (\ln 2x + 1)' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$;

$y''' = \left(\dfrac{1}{x} \right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Итак, $(x \ln 2x)''' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Задания для решения в аудитории

Найти производную 2-го порядка от функции

1) $y = \sin^2 x$

2) $y = \dfrac{1}{1 + 2x}$

3) $y = e^{x^2}$

4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

2.3 Производная неявно заданной функции

Функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, если при подстановке её в это уравнение, она обращает его в тождество:

$$F(x, f(x)) \equiv 0 .$$

Если функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной y' нужно продифференцировать по x обе части этого уравнения, учитывая, что y есть функция от x, а затем разрешить полученное уравнение относительно y'.

Чтобы найти y'' неявно заданной функции, надо уравнение $F(x, y) = 0$ дважды продифференцировать по x и т.д.

Решение типовых примеров

Найти производную неявно заданной функции

Пример 1. $xy^2 = \operatorname{ctg} y$.

Решение.

$x'y^2 + 2xyy' = -\dfrac{y'}{\sin^2 y}$; $y^2 + 2xyy' = -\dfrac{y'}{\sin^2 y}$; $y^2 \sin^2 y = -y'\left(2xy\sin^2 y + 1\right)$;

$y' = -\dfrac{y^2 \sin^2 y}{2xy\sin^2 y + 1}$.

Пример 2. Найти y': $x^3 \cdot y^2 + 5xy + 4 = 0$

Решение. Рассматриваем у как функцию х. Находим производную.

$3x^2 \cdot y^2 + 2x^3 yy' + 5y + 5xy' = 0$

Решаем полученное уравнение относительно у':

$y' = -\dfrac{3x^2 y^2 + 5y}{2x^3 y + 5x}$

Пример 3. $arctgy - y + x = 0$ Найти y'.

Решение.

$\dfrac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0$ или $y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 = 0$. $y' = \dfrac{1+y^2}{y^2} = \dfrac{1}{y^2} + 1$, тогда

$y'' = -2y^{-3} \cdot y' = -\dfrac{2y'}{y^3}$. В правую часть вместо y подставим его значение:

$$y'' = -\frac{2}{y^3} \cdot \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$$

Задания для решения в аудитории

Найти производную неявно заданной функции

1) $x^2 + y^2 - xy = 0$

2) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$

3) $x^3 - y^3 = x^2 y^2$

4) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

5) $\ln y + \dfrac{y}{x} = 0$

2.4 Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $y' = f'(x)$, то:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Определение 2. $f'(x)\Delta x$ приращения функции Δy, линейная относительно приращения аргумента Δx, называется дифференциалом функции и обозначается:

$$df(x) = f'(x)\Delta x \quad \text{или} \quad dy = y'\Delta x.$$

Положив $y = x$, получим $dx = \Delta x$ и поэтому $dy \approx y' d\,x$ или $df(x) = f'(x)d\,x$, отсюда $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Из определения следует, что при достаточно малом приращении аргумента $\Delta x = dx$:

$$\Delta f(x) \approx df(x) \quad \text{или} \quad \Delta y \approx dy.$$

Так как

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

то

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \approx f(x) + df(x).$$

Итак,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Последняя формула применяется в приближенных вычислениях для вычисления значения функции, близкого к значению $f(x)$.

Дифференциал сложной функции $y = f\left[u(x)\right]$ имеет вид:

$$dy = df(u)du = df(u)u'(x)dx.$$

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е.:

$$d^2 y = d(dy) = y'' dx^2$$

или

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2,$$

отсюда

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Дифференциал *n* – го порядка имеет вид:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$$

или

$$d^n y = y^{(n)} dx^n,$$

отсюда

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Решение типовых примеров

Найти дифференциал функции

Пример. $y=\left(1+\operatorname{tg}x\right)^3$.

Решение.

$dy=y'dx$

$$y'=\left[\left(1+\operatorname{tg}x\right)^3\right]'=3\left(1+\operatorname{tg}x\right)^2\cdot\left(1+\operatorname{tg}x\right)'=3\left(1+\operatorname{tg}x\right)^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом,

$$dy=\frac{3\left(1+\operatorname{tg}x\right)^2 dx}{\cos^2 x}.$$

Задания для решения в аудитории

Найти дифференциал функций:

1) $y=\sqrt{1+x^2}$

2) $y=\left(1+x-x^2\right)^3$

3) $y=x^2e^x$

2.5 Правило Лопиталя

Пусть функции $f\left(x\right)$ и $\varphi\left(x\right)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f\left(x_0\right)=\varphi\left(x_0\right)=0$. Пусть $\varphi'\left(x\right)\neq 0$ в окрестности точки x_0.

Тогда, *предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l \qquad (1)$$

Замечания:

1. Правило Лопиталя (1) верно и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x=x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$

2. Формула (1) справедлива и в том случае, когда $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражения (1), то правило Лопиталя можно применить еще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Решение типовых примеров

«Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$***»***

Пример 1. Найти пределы, применяя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(2-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{-x+1}{x}}{\dfrac{-2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=-1$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left(\text{\textit{неопределённость}}\left[\dfrac{0}{0}\right]\underset{x\uparrow0}{,}\ \text{\textit{применим правило Лопиталя}}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\text{\textit{снова неопределённость}}\left[\dfrac{0}{0}\right],\ \text{\textit{вторично правило Лопиталя}}\right)=$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to0}\cos x=\dfrac{1}{6}.$

«Неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$***»***

Пример 2. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+0}-\frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+0}(-x) = 0.$

Замечание: в условии задачи подчёркнуто, что $x\to+0$, это указание является существенным, потому что при $x\to-0$ и при $x\to 0$, предел не существует, т.к. отрицательные числа логарифмов не имеют.

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x} = \lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}$ (прежде чем применять правило Лопиталя, преобразуем дробь):

$$\frac{3}{5}\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\left(\frac{cos5x}{\cos 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{cos5x}{\cos 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{-5\sin 5x}{-3\sin 3x}\right)^2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}\left(\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)^2 = \frac{5}{3}.$$

«*Неопределённость вида* $[\infty-\infty]$»

Если $\lim\limits_{x\to a}f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = +\infty$, то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$ надо преобразовать эту разность к такому виду:

$$f(x)-\varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}, \qquad \text{тогда} \qquad \lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}}$$

учитывая, что $\lim\limits_{x\to a}f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = +\infty$, получили «неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$», которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.

Пример 3. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) =$ (при $x\to1$ $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ бесконечно большие величины одного порядка, а поэтому имеем неопределённость $[\infty-\infty]$):

$$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1} =$$

$$= \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x+x-1)'} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{2}$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to1}\frac{2-x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$

«Неопределенности вида $[0\cdot\infty]$***»*** могут быть сведены к *«неопределённости вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$*»*.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$,

тогда $f(x)\cdot\phi(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\phi(x)}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $f(x)\cdot\phi(x)=\dfrac{\phi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$,

получим: $$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\phi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\phi(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\phi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Пример 4. Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ (при $x\to+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$)

«Неопределенности вида 1^{∞}***,*** ∞^0***,*** 0^0***»*** сводятся к *«неопределенности вида* $0\cdot\infty$*»* с помощью тождества:

$$\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}(f(x)>0)\quad\left[e^{\ln x}=x\right]$$

Можно записать:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$$

Дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Пример 5.Найти пределы.

а) $\lim\limits_{x\to+0} x^x=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}=e^0=1$,

$\left(\lim\limits_{x\to+0} x\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0\right)$

б) $\lim\limits_{x\to0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln x(1+mx)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln x(1+mx)}=e^m$

$\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln x(1+mx)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+mx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{m}{1+mx}}{1}=m\right)$

в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}=\lim\limits_{x\to+0}e^{tgx\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}tgx\ln\frac{1}{x}}=e^0=1$

$$(\lim_{x\to+0} tgx\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{tgx}} = \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1/x^2}{1/x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to+0}\sin x\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0$$

Задания для решения в аудитории

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{\sin 2x}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^3}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$

2.6 Полное исследование функции и построение графика

При полном исследовании функции решаются следующие вопросы:

1. Нахождение области определения функции.
2. Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.
3. Определение точек разрыва функции.
4. Определение асимптот графика функции.
5. Определение интервалов возрастания и убывания функции.
6. Определение экстремума функции.
7. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика.
8. Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для большей точности эскиза графика рекомендуется построить ещё и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертёж.

Решение типовых примеров

Исследовать функцию и построить график:

Пример 1. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1) $Д\left(y\right)=R$,

2) функция нечётная, т.к. $y\left(-x\right)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$, т.е. $f(-x)=-f(x)$, следовательно, её график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции

а) функция непрерывна, вертикальных асимптот нет.

б) $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

$y=0$ (ось Ox) – горизонтальная асимптота.

4) Найдём первую производную и возможные точки экстремума:

$$y'=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$y'=0$ $\qquad 1-x^2=0 \qquad x_{1,2}=\pm 1$.

5) Найдём вторую производную и возможные точки перегиба:

$$y''=\frac{-4x\left(1+x^2\right)^2-2\left(1-x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{-4x\left(1+x^2\right)-8x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-4x-4x^3-8x+8x^3}{\left(1+x^2\right)^3}=$$

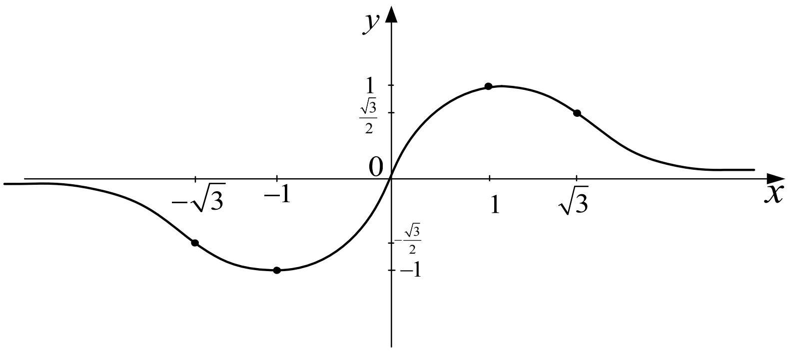
$$=\frac{4x^3-12x}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$y''=0$ $\quad 4x(x^2-3)=0$ $\quad x_3=0$ $\quad x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$.

1) Строим таблицу

x	0	(0; 1)	1	$(1;\ \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
y'	+	+	0	–	–	–
y''	0	–	–	–	0	+
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘
	т.п.		max		т.п.	

7) Строим график



Пример 2. $\quad y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$

1) $Д\left(y\right)=\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$

2) функция нечётная, т.к. $y\left(-x\right)=-\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)=-y\left(x\right)$, следовательно, график симметричен относительно начала координат.

3) Найдём асимптоты графика функции:

а) $\lim\limits_{x\to\pm0}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)=\pm\infty$ $\quad x=0$ - вертикальная асимптота

б) $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{2};\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)=0$$

$y=\dfrac{x}{2}$ - наклонная асимптота.

4) Найдём возможные точки экстремума:

$$y'=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2};\quad y'=0\qquad \frac{2}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad x^2=4\qquad x_{1,2}=\pm 2\ .$$

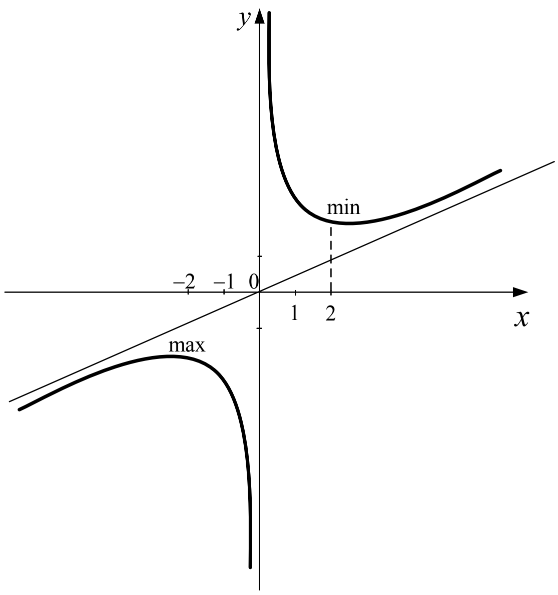
5) Найдём возможные точки перегиба:

$$y''=\frac{4}{x^3};\quad y\neq 0$$

6) Составим таблицу, учитывая нечетность функции

x	0	(0; 2)	2	(2;+∞)
y'	$\overline{\exists}$	–	0	+
y''	$\overline{\exists}$	+	+	+
y	$\overline{\exists}$	$\searrow$	2	$\nearrow$
	т.р.		min	

7) Строим график функции



Задания для решения в аудитории

Исследовать функцию и построить график:

1) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

2) $y=\dfrac{x^2+1}{2x+3}$

3) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

ГЛАВА 3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1 Область определения функции

Функции одной переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Поэтому вводится понятие функции нескольких переменных.

Все основные положения теории функции нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных и обобщаются на случай большего числа переменных.

Переменная величина z называется функцией двух независимых переменных x и y, если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области изменения D соответствует определённое единственное значение величины z.

Обозначается функция 2-х переменных:

$z = f(x,y)$, $\quad z = z(x,y)$, $\quad F(x,y,z) = 0$.

Множество пар (x, y) значений x и y, при которых определена функция $z = f(x,y)$ называется **областью определения функции** и обозначается $D(z)$ или $D(f)$.

Каждой паре значений (x, y) в плоскости xOy соответствует точка $M(x,y)$. Поэтому пару значений (x, y) называют точками, а функцию $z = f(x,y)$ называют функцией точки $M(x,y)$ плоскости xOy и записывают $z = f(M)$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Решение. Функция z принимает действительные значения при условии $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, то есть $x^2 + y^2 \leq a^2$. Областью определения данной функции является круг радиуса a с центром в начале координат, включая граничную окружность.

Пример 2. Найти область определения функции $z = \ln\left(x^2 - y^2 - R^2\right), R > 0$.

Решение. Область определения функции характеризуется неравенством $x^2 - y^2 > R^2$. Область определения – внутренняя часть гиперболы $\dfrac{x^2}{R^2} - \dfrac{y^2}{R^2} = 1$ с асимптотами $y = \pm x$, полуосями $a = b = R$, фокусами $F_1 = \left(-R\sqrt{2};0\right), F_2 = \left(R\sqrt{2};0\right)$ ($c^2 = a^2 + b^2 = 2R^2$).

3.2 Частные производные функции нескольких переменных

Частной производной по x функции $z=f(x,y)$ называется предел отношения частного приращения по x $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю и обозначается z_x', $f_x'(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

По определению $z_x' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$.

Аналогично,

$$z_y' = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Значение частной производной зависит от точки, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная есть функция точки (x,y), т.е. также является функцией 2-х переменных.

Частные приращения и производные функции n переменных $(n>2)$ определяются и обозначаются аналогично.

Из определения частных производных следует, что при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Все правила и формулы дифференцирования для функции одной переменной сохраняются для частных производных функции нескольких переменных.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти частные производные функций:

а) $z=e^{x^2+y^2}$;

Решение. Рассматривая у как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)_x' = 2xe^{x^2+y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)_y' = 2ye^{x^2+y^2}.$$

б) $z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln\left(x^2-y^2\right)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

Задания для решения в аудитории

1) Найти и изобразить область определения функции:

а)

$$z = \arcsin\left(1 - x^2 - y^2\right) + \arcsin 2xy$$

б)

$$z = \sqrt{x + y - 1} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

в)

$$z = \sqrt{xy}$$

г)
$z = y + \sqrt{x}$

д)
$z = \dfrac{4}{x + y}$

2) Найти частные производные функций:

а) $U = x^2 + 3xy + 4y^2$

б) $U = \sin(3x + 5y - 4z)$

в) $U = e^{\frac{x}{y}}$

г) $z = \ell n\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

3.3 Полный дифференциал. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Главная часть полного приращения:

$$\Delta z = f_x'(x,y)\cdot\Delta x + f_y'(x,y)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y$$

функции $z = f(x,y)$, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом*** этой функции.
Обозначается полный дифференциал dz или $df(x,y)$.
По определению

$$dz = z_x'\cdot\Delta x + z_y'\cdot\Delta y \text{ или } dz = f_x'\cdot\Delta x + f_y'\cdot\Delta y, \text{ или } dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Учитывая, что $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, можно записать $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ справедливы приближенные равенства $\Delta z \approx dz$ и $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz$. Это соотношение используется в приближённых вычислениях для нахождения значений функции $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ близких к значению функции $f(x_0,y_0)$:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y.$$

Решение типовых заданий

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Пример 2. Вычислить приближенно $1{,}07^{3,97}$.

Решение. Число $1{,}07^{3,97}$ есть частное значение функции $z = f(x, y)$ при x = 1,07, y = 3,97. Известно, что f(1,4) = 1. Поэтому, принимаем x_0 = 1, y_0 = 4. Тогда

$\Delta x = x - x_0 = 0{,}07,\ \Delta y = y - y_0 = -0{,}03.$

Значение $f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right)$ вычислим при помощи формулы $f\left(x_0, y_0\right) + df\left(x_0, y_0\right)$. Имеем:

$f_x^{'} = yx^{y-1}, \quad f_y^{'} = x^y \ln x,\ f_x^{'}\left(1,4\right) = 4,\ f_y^{'}\left(1,4\right) = 0,$

$df\left(1,4\right) = 4 \cdot 0{,}07 + 0 \cdot \left(-0{,}03\right) = 0{,}28.$

Таким образом, $1{,}07^{3,97} \approx 1 + 0{,}28 = 1{,}28$.

Задания для решения в аудитории

1) Найти полный дифференциал функций:

а) $z = \ell n\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

б) $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$

в) $z = x\sin y + y\sin x$

г) $z = \dfrac{xy}{x - y}$

д) $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ *при* $x = 3 \quad y = 4 \quad \Delta x = 0,1 \qquad \Delta y = 0,2$

е) $z = e^{xy} \qquad x = 1 \quad y = 1 \quad \Delta x = 0,15 \quad \Delta y = 0,1$

2) Вычислить приближенно.

а) $(1,03)^{3,001}$

б) $\sqrt{(6,03)^2 + (8,04)^2}$

3.4 Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование неявной функции

Пусть $z = f(x, y)$ - функция двух переменных *x* и *y*, каждая из которых является функцией независимой переменной *t*, то есть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Тогда функция $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ является сложной функцией $z = z(t)$ независимой переменной *t.* Переменные *x* и *y* являются промежуточными аргументами.

Предположим, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые функции. Имеет место равенство

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, например, *t* = *x*, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

и $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной *z* по *x*.

Если аргументы *x* и *y* функции $z = f(x, y)$ являются функциями двух переменных: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то $z = f(x(u, v), y(u, v))$ также является функцией двух переменных (u, v).

Пусть $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ - дифференцируемые функции. Имеют место формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Дифференциал сложной функции $z = z(x, y)$ где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv.$$

Если $F(x, y)$ - дифференцируемая функция переменных x, y в некоторой области D и $F'_y(x, y) \neq 0$,то уравнение $F(x, y) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$ è $x = \cos 2t,\ y = \operatorname{arctg} t.$

Решение. Производную находим по формуле $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2,\ \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t,\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\frac{dz}{dt} = -2\left(5x^4 + 2y\right) \cdot \sin 2t + \left(2x - 3y^2\right) \cdot \frac{1}{\left(1+t^2\right)}.$$

В результате можно сохранить как переменные *x* и *y*, так и заменить их через *t*.

Пример 2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, где

$$\mathrm{z} = \ln\left(\mathrm{u}^2 + v^2\right),\ u = x\cos y,\ v = y\sin x.$$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ находим по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v^2},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2 + v^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \cdot \cos y + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot y\cos x = \frac{2}{U^2 + V^2}\left(U\cos y + Vy\cos x\right) =$$
$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}\left(x\cos^2 y + y^2\sin x\cos x\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \cdot x\sin y + \frac{2v}{u^2 + v^2} \cdot \sin x = \frac{2}{U^2 + V^2}\left(V\sin x + Ux\sin y\right) =$$
$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}\left(y\sin^2 x - x^2\sin y\cos y\right).$$

Пример 3. $\cos(x + y) + y = 0$. Найти y'.

Решение. Здесь $F(x, y) = \cos(x + y) + y = 0.$

Найдем $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x+y), \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\sin(x+y)+1.$

Следовательно, $y' = -\dfrac{-\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)} = \dfrac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}.$

Задания для решения в аудитории

1) Найти:

а) $\dfrac{dz}{dt}$, *если* $z = x^2 + xy + y^2$, *где* $x = t^2 \quad y = t^3$

б) $\dfrac{dU}{dt} - ? \qquad U = \sin\dfrac{x}{y}$, *где* $x = e^t \quad y = t^2$

в)

$\dfrac{\partial z}{\partial x} - ? \qquad \dfrac{dz}{dx} - ? \qquad z = \ell n\left(e^x + e^y\right)$, *где* $y = x^2$

г)

$z = arctg\dfrac{u}{v} \qquad u = x\sin y \qquad v = x\cos y \qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} - ? \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} - ?$

д)

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ и dz, если $z = \cos xy$, $x = ue^{v}$, $y = v\ln u$.

2) Найти y'.

а) $x^2 + xy + y^2 = 6$

б) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

3.5 Частные производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y).$$

Частные производные от частных производных $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$ называются частными производными второго порядка функции $z = f(x,y)$.

Каждая частная производная первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеет две частные производные. Таким образом, получаем четыре частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y).$$

Производные $f''_{xy}(x,y)$; $f''_{yx}(x,y)$ называются смешанными производными второго порядка и $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по *x*, так и по *y*. Получим частные производные третьего порядка. Частная производная *n*-го порядка есть частная производная от производной (*n-1*)-го порядка.

Дифференциал от дифференциала *dz* в точке *M*(*x,y*) называется дифференциалом второго порядка в этой точке и обозначается $d^2 z$.

$$d(dz) = d(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy) =$$

$$= f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2,$$

$$d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Дифференциал от дифференциала (*n-1*)-го порядка называется дифференциалом *n*-го порядка функции $z = f(x,y)$: $d^n z = d\left(d^{n-1}z\right)$.

Выражение для dz символически можно записать в виде:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y).$$

При $n = 3$

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f\left(x, y\right) =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 .$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти все частные производные первого и второго порядков от функции $z = x^3 - x^2 y - y^3$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy; \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2 .$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 2xy\right) = 6x - 2y ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 2xy\right) = -2x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 - 3y^2\right) = -2x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 3y^2\right) = -6y .$$

Пример 2. Найти $d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$

Решение.

Находим первый дифференциал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Второй дифференциал:

$$d^2 z = \frac{2\left(xy \cdot dx^2 + \left(y^2 - x^2\right) dx dy - xy dy^2 \right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Задания для решения в аудитории

1) Найти частные производные второго порядка:

а) $z = x^4 + 3x^3 y - 4x^2 y^2 + 5xy^3 - y^4$

б) $z = y\ell nx$

в) $z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$

2) Найти дифференциалы второго порядка:

а) $z = x^2 y^2$

б) $z = \cos\left(x + 2y^2\right)$

3) Найти полный дифференциал функции *z(x,y)* заданной уравнением
$z^3 - 3xyz = a^3$

3.6 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $P_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ - фиксированная точка поверхности, заданной функцией $z = f(x, y)$ или уравнением $F\left(x, y, z\right) = 0$. Касательной плоскостью к поверхности в точке P_0 называется плоскость t, проходящая через точку P_0 и такая, что угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку P_0 и любую точку поверхности, стремится к нулю, когда точка *P* стремится к P_0. Нормалью называется прямая *n*, проходящая через P_0 перпендикулярно касательной плоскости.

Нормальный вектор касательной плоскости t и направляющий вектор прямой *n* совпадают.

Если уравнение поверхности задано функцией $z = f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$, то уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot(y - y_0) +$$
$$+F'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot(z - z_0) = 0;$$

уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Решение типовых примеров

Пример 1. Дана поверхность $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y.$ Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности в точке М(1,1,1).

Решение. Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$

и их значения в точке М(1,1,1):

$$\left.\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|_M = -1; \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1)$, или $x - 2y + z = 0.$

Уравнение нормали:

$$\frac{(x-1)}{-1} = \frac{(y-1)}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Задания для решения в аудитории

1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+3y^2$ в точке M для которой $x=1$ $y=1$.

2. Составить уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(1,1,3)$.

$z = 1 + x^2 + y^2$

3.7 Экстремум функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную и непрерывную в некоторой области D.

Функция $f(x, y)$ имеет строгий локальный максимум (минимум) в точке $M(x_0;y_0)$, если неравенство $f(x_0, y_0) > f(x, y)\left(f(x_0, y_0) < f(x, y)\right)$ имеет место во всех точках $M(x, y) \neq M_0$.

Необходимые условия экстремума:

Если дифференцируемая функция $z = f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум, то в этой точке обе частные производные первого порядка равны нулю, то есть

$$f'_x(x_0;y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0;y_0) = 0.$$

Точка $(x_0;y_0)$ называется стационарной точкой функции $f(x, y)$, если $df(x_0, y_0) = 0$. Пусть $(x_0;y_0)$ - стационарная точка функции $f(x, y)$, обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \ B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Достаточные условия экстремума:

Если $AC - B^2 > 0$, и $A < 0$, то $(x_0;y_0)$ - точка максимума.

Если $AC - B^2 > 0$, и $A > 0$, то $(x_0;y_0)$ - точка минимума.

Если $AC - B^2 < 0$, то $(x_0;y_0)$ - не является точкой экстремума.

Если $AC - B^2 = 0$, то точка $(x_0;y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, требуется дополнительное исследование.

Решение типовых примеров

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$f(x,y)=4x^2y+24xy+y^2+32y-6.$

Решение. Область определения функции $D(f)$ - плоскость Oxy, $f(x,y)$ - дифференцируема в каждой точке $\grave{I}\ \left(x;y\right)\in D(f)$.

Определим стационарные точки:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=8xy+24y=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4x^2+24x+2y+32=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\left(x+3\right)=0,\\ 2x^2+12x+y+16=0.\end{cases}$$

$y=0;\ x^2+6x+8=0\Rightarrow x_1=-4,\ x_2=-2,$

$x=-3,\ y=2.$

Получили три стационарные точки: M_1(-4,0), M_2(-2,0), M_3(-3,2).

Эти точки исследуем на достаточность условий экстремума:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8x+24,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

Для каждой точки вычислим соответствующие *A, B, C*.

$M_1\left(-4;0\right)$: $A_1=0,\quad B_1=-32+24=-8,\quad C_1=2$, $A_1C_1-B_1^2=-64<0$, то есть $M_1\left(-4;0\right)$ не является точкой экстремума.

$M_2\left(-2;0\right)$: $A_2=0,\quad B_2=-16+24=8,\quad C_2=2$, $A_2C_2-B_2^2=-64<0$, то есть $M_2\left(-2;0\right)$ не является точкой экстремума.

$M_3\left(-3;2\right)$: $A_3=16,\quad B_3=0,\quad C_3=2,\quad A_3C_3-B_3^2=32>0$ при этом $A>0$. Вывод: $M_3\left(-3;2\right)$ точка локального минимума функции $f(x,y)$, $f\left(-3;2\right)=-10$.

Задания для решения в аудитории

Исследовать на экстремум функции:

1. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

2. $z = x^3 + y^3 - 9xy$

3. $z = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2xy - 5x - y + 2$

3.8 Производная по направлению. Градиент функции

Производной функции $u(x,y,z)$ *по направлению* вектора $\overline{\ell}$ называется предел отношения приращения этой функции в направлении вектора $\overline{\ell}$ $\Delta_{\overline{\ell}}u$ к $\Delta\ell$ *при* $\Delta\ell \to 0$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{\ell}}$.

Итак, по определению производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{\ell}} = \lim\limits_{\substack{\Delta\ell \to 0 \\ (M \to M_0)}} \dfrac{\Delta_{\overline{\ell}}u}{\Delta\ell}$.

Введем *формулу для вычисления* производной по направлению.

По условию функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема. Следовательно, ее *полное приращение* в точке M_0 можно представить в виде

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + w(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\Delta\ell, \quad \text{где} \quad w \to 0 \quad при \quad \Delta\ell \to 0.$$

Производной по направлению вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Если $\overline{\ell} = \{X, Y, Z\}$, то направляющие косинусы определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overline{\ell}|}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\overline{\ell}|}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\overline{\ell}|} \qquad (5)$$

Замечание 1. Если направление $\overline{\ell}$ совпадает с положительными направлениями одной из осей координат (с одним из ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$), то производная по этому направлению совпадает с соответствующей частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Замечание 2. Если производная функции *u* в точке M_0 по направлению $\overline{\ell}$ положительная, то функция *u* в этом направлении возрастает, если же $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{\ell}} < 0$, то функция в направлении $\overline{\ell}$ убывает, а если $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{\ell}} = 0$, то возможен экстремум.

С производной по направлению связан вектор, называемый *градиентом*.

Градиентом функции $u = u(x, y, z)$ в точке *M(x,y,z)* называется *вектор, направление* которого совпадает с направлением нормали $\overline{n}$ к поверхности уровня $u(x,y,z)=C$, проходящей через данную точку M , а *величина* равна производной по этой нормали.

Градиент скалярного поля, или градиент функции $u=u(x,y,z)$, обозначается так:

$$qrad\, u(M)=qrad\, u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\ .$$

Градиент указывает направление и величину его максимального роста в точке М.

$$\left|qrad\, u(M)\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)^2}$$

Для упрощения решения прикладных задач укажем некоторые свойства градиента справедливость которых легко доказать.

Свойство 1. Если $u(M)=C=const,\quad то\quad qrad\, u(M)=0$.

Свойство 2. $qrad(Cu)=C\,qrad\, u,\quad где\quad C-const$.

Свойство 3. $qrad\left[u(M)\cdot v(M)\right]=vqrad\, u(M)+u\,qrad\, v(M)$.

Свойство 4. $qrad\left[u(M)\pm v(M)\right]=qrad\, u(M)\pm qrad\, v(M)$.

Свойство 5. $qrad\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,qrad\, u-u\,qrad\, v}{v^2}$.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти производную функции $u=x^2-2xyz+y^2$ в точке $M_1(1;2;-1)$ по направлению от точки M_1 к точке $M_2\,(2;4;-3)$.

Решение.

1) $\overline{M_1M_2}(1;2;-2)\Rightarrow\bar{\ell}=\overline{M_1M_2}=\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{k}$;

2) $\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$;

3) $\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=-\frac{2}{3}\quad\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\right)$;

4) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2yz\Rightarrow\frac{\partial u(M_1)}{\partial x}=2\cdot1-2\cdot2\cdot(-1)=6$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=2y-2xz\Rightarrow\frac{\partial u(M_1)}{\partial y}=2\cdot2-2\cdot1\cdot(-1)=6$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=-2xy\Rightarrow\frac{\partial u(M_1)}{\partial z}=-2\cdot1\cdot2\cdot=-4$;

5) $\frac{\partial u}{\partial\bar{\ell}}=6\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{3}+(-4)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{26}{3}>0$.

Пример 2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $u(M)=x^{\,y}-z$ в точке $M_0\,(2;2;4)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M)=y\cdot x^{y-1}\Big|_{M_0}=4;\quad\frac{\partial u}{\partial y}(M)=x^y\cdot\ln x\Big|_{M_0}=4\ln 2;\quad\frac{\partial u}{\partial z}(M)=-1$$

$\overline{qrad}\, u(M_0) = 4\overline{i} + 4\ln 2\overline{j} - \overline{k}$

Наибольшая скорость возрастания поля

$\max \frac{\partial u}{\partial \ell} = \left|\overline{qrad}\, u(M_0)\right| = \sqrt{16 + 12\ln^2 2 + 1} = \sqrt{17 + 16\ln^2 2}$.

Задания для решения в аудитории

1. Найти производную функции $u(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точке *M_0 (0;0;0)* по направлению, идущему от этой точки к точке *M (3;4;0)*.

2. Найти скорость изменения функции $u(M) = xyz$ в точке *M_0 (5;1;-8)* в направлении, идущем от этой точки к точке *B_0 (9;4;4)*.

3. Найти градиент функции $u(M) = 3x^2y + y^2 - 3xy^3 + y^4$ в точке *M_0 (1;2;0)* и его направление.

4. Найти величину и направление градиента функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \quad \text{в точке} \quad M(1; -1; 2).$$

Определить, в каких точках градиент перпендикулярен к оси *0x*, в каких точках равен нулю.

Расчетно-графическая работа № 1
«Пределы функций»
Вариант №1

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$

Вариант №2

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

6. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$

Вариант №3

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$

Вариант №4

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{2\sin x}$

Вариант №5

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{3x^2}$

Вариант №6

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$

Вариант №7

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\,\dfrac{\pi x}{2}$

Вариант №8

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

Вариант №9

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1-x^3+4x}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x-\sin 2x}{x^2}$

Вариант №10

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^2+3x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg x}$

Вариант №11

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2+x+10}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

Вариант №12

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$

Вариант №13

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$

Вариант №14

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$

Вариант №15

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$

Вариант №16

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{tg 3x}$

Вариант №17

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{2x^2}$

Вариант №18

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$

Вариант №19

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$

Вариант №20

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{tg 2x}\right)$

Вариант №21

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^x$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos^2 x-cos^2 2x}{x^2}$

Вариант №22

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)^{3x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin\,5x}{x^2-x}$

Вариант №23

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos^2 2x}{x\, arcsin\, x}$

Вариант №24

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\, 4x}{x\, sin\, x}$

Вариант №25

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$

Вариант №26

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x-\sin 2x}{x^2}$

Вариант №27

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

Вариант №28

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$

8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$

Вариант №29

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$

Вариант №30

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$

Расчетно-графическая работа № 2
«Производная функции»

Вариант 1

1. Найти производную функций:

а) $y = e^{\sin x}x^5 + \lg(5x+1)$ в) $y = \sqrt{3x^2+1} + 2^{\operatorname{tg} x}$

б) $y = \dfrac{\cos^2 3x}{2x+3} - \arcsin 2x$ г) $x^2 - y^2 - 2y = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(x+1)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$

Вариант 2

1. Найти производную функций:

а) $y = \operatorname{ctg}^2 8x - 2x^3 + 1$ в) $y = 3^{x^2}\sin 3x$

б) $y = \operatorname{arctg}^3(\cos x)$ г) $xy = ctgy$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}\ln x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3\ln x}{x+2}$

Вариант 3

1. Найти производную функций:

а) $y = \dfrac{\arccos 2x}{x} - 8\sqrt{x} + 2x$ в) $y = \sqrt{7x^2+5} + 3^{\operatorname{ctg} x}$

б) $y = \ln(\sin 2x) + \cos 3x$ г) $x + y + arctg3x + tg2y = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-9}{2-3x-x^2}$

Вариант 4

1. Найти производную функций:

а) $y = \operatorname{tg}^2 7x + 3x^2 + 8$ в) $y = \dfrac{\arcsin 3x}{x^2} + \sqrt[3]{x} - 1$

б) $y = 5^{x^3}\cos 8x$ г) $x^3 + y^3 = x^2 y^2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{7}{x^7-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 6x - \sin 7x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{2x-3}$

Вариант 5

1. Найти производную функций:

а) $y = \ln\cos 3x - \sin 2x$ в) $y = \ln^3 \frac{1}{x}$

б) $y = 2^{\ln x} \operatorname{arctg} 3x$ г) $\ln y + \frac{y}{x} = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x})$; б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3 - 4x - 2x^2}{2x - 1}$

Вариант 6

1. Найти производную функций:

а) $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot x^4 - \ln(3x^3 + 5)$ в) $y = \sqrt{2x + 3} - 4^{\operatorname{tg} x}$

б) $y = \frac{\sin^3 3x}{2x + 5} - \arcsin(3x + 1)$ г) $6^x + 6^y = 6^{x + y}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x} - ctgx)$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{xe^x}{x + e^x}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$

Вариант 7

1. Найти производную функций:

а) $y = \operatorname{ctg}^3 2x + 4x^2 + 5$ в) $y = \operatorname{arctg}^2(\sin x)$

б) $y = 4^{x^5} \cos 2x$ г) $y = 2x - arctgy$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$; в) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$

Вариант 8

1. Найти производную функций:

а) $y = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} - \sqrt{x} + 2$ в) $y = \ln\sin 3x + \operatorname{tg} 8x$

б) $y = 2^{\ln x} \arccos 3x$ г) $5^x - \sin y = 5x + y^2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\cos x - 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x})$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{1 - xe^x}$

Вариант 9

1. Найти производную функций:

а) $y = e^{\text{ctg}\, x} x^7 - \ln(2x^2 + 8x)$ в) $y = \dfrac{\cos^3 2x}{5x+1} + \arcsin(2x+5)$

б) $y = \sqrt{2x^2+1} + 2^{\text{ctg}\, x}$ г) $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 2x}{tg 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

Вариант 10

1. Найти производную функций:

а) $y = \text{tg}^2\, 3x - 3x - 4$ в) $y = \text{arcctg}^2(\cos x)$

б) $y = 2^{x^2} \sin 3x$ г) $2y - 1 - xy^3 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} ctg 3x \cdot tg x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{3x^3 + 4x}$

Вариант 11

1. Найти производную функций:

а) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{x} - \sqrt{x} + 5$ в) $y = \ln\cos 2x - \text{ctg}\, 3x$

б) $y = 4^{\ln x} \arcsin 2x$ г) $x^3 + x^2 y + y^2 - 1 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{2x - \sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln^2 x$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x - 3}$

Вариант 12

1. Найти производную функций:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos 2x} + 2^x$ в) $y = \arcsin^2(e^x) + x^3$

б) $y = \text{tg}^3 x \cdot \dfrac{1}{x}$ г) $e^y + xy = e$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1+x))^x$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 3x^3 + 5}$

Вариант 13

1. Найти производную функций:

а) $y = \operatorname{arctg}^2 3x + 2x^4 + 1$

в) $y = \ln^2 \frac{\sin 3x}{x}$

б) $y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln x$

г) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - x \cdot \cos x}{x - \sin x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot e^{x^{-2}}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{15x^2 + 2x^4 - 5x}{18x^3 + x^2}$

Вариант 14

1. Найти производную функций:

а) $y = \sqrt[3]{3x^5 + 7} + \arccos 2x$

в) $y = \frac{\sin e^x}{x^2} + 2x^2 + 5x$

б) $y = \arcsin(5x + 3) \cdot e^{2x}$

г) $tgy = xy - y$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - tgx}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{ctgx}{x} - \frac{1}{x^2})$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2 - 3x - x^2}{2x^2 + x - 1}$

Вариант 15

1. Найти производную функций:

а) $y = \frac{\sqrt{x + 3}}{\sin 3x} + 3^x$

в) $y = \arccos^2 5x + e^{x^2}$

б) $y = \operatorname{ctg}^3 x \cdot \frac{2}{x}$

г) $x \cdot e^y = x^2 + y - 2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \cdot \sin x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x + 1)})$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^5 - 4x^2 + 1}{2x^5 + 3x^3 - x}$

Вариант 16

1. Найти производную функций:

а) $y = \arcsin^2 5^x + \sqrt{x + 2}$

в) $y = \operatorname{tg}^3(\sin 2x) + 2^x$

б) $y = \frac{\cos 8x}{x^5} - \arccos 3x$

г) $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx - \sin x}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin 2x})$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^6 - 3x^2 - 2}{2x^6 + 4x + 5}$

Вариант 17

1. Найти производную функций:

а) $y = \ln^3(\sin 8x) + \mathrm{ctg}\ 2x$ в) $y = \sin 3x \cdot \ln 7x^2$

б) $y = \mathrm{arctg}^2\, 3x$ г) $x \cdot \sin y + y \cdot \sin x = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 2x - \sin 2x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0}(ctgx - \dfrac{1}{x})$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{9x^3 - 4x^2 + 1}{6x^3 + 3x + 2}$

Вариант 18

1. Найти производную функций:

а) $y = 2^{\sin x} + x^2 + 4$ в) $y = \sin^3 7x^2$

б) $y = \dfrac{x^2}{\ln x} + 8x$ г) $x^2 + xy^3 - y^2 - 5 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{x \cdot tg 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^5 - x^2 + x}{x^5 - 2}$

Вариант 19

1. Найти производную функций:

а) $y = \dfrac{\cos 3x}{4} - \arccos 7x$ в) $y = \arccos^2 7^x + \sqrt{3x + 1}$

б) $y = \dfrac{\sin 3x}{x^2} - \arcsin 4x$ г) $\arcsin \dfrac{x}{y} = y \ln x$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x - 3x}{2x^3 - x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{\sin x}}$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(e^x + 1)}{1 - x \cdot e^x}$

Вариант 20

1. Найти производную функций:

а) $y = \ln^2(\cos 2x) + \mathrm{tg}\ 3x$ в) $y = \cos 3x \cdot \ln 8x$

б) $y = \mathrm{arcctg}^2\, 8x$ г) $e^x = xy$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} x(e^{\frac{2}{x}} - 1)$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{5x^4 + 3x - 2}$

Вариант 21

1. Найти производную функций:

а) $y = \ln^3 \sqrt{\sin x}$ в) $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{3x} + \arcsin x^2$

б) $y = \cos^2 \ln 5x$ г) $e^{x-y} + \sqrt{xy} = 2$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\cdot ctg(x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{tgx}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$

Вариант 22

1. Найти производную функций:

а) $y = \sin 3x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ в) $y = \operatorname{arctg} 5^x - 8x + 5$

б) $y = 2^{x^2+\sin x}$ г) $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cdot \ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-2x+5}{4-x^4}$

Вариант 23

1. Найти производную функций:

а) $y = \arccos^2 5x + \ln 3x$ в) $y = \cos^2\left(\ln \dfrac{1}{x}\right)$

б) $y = \operatorname{arctg}(\sin 8x)$ г) $\ln x + e^{\frac{-y}{x}} = \dfrac{x}{e}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot \ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

Вариант 24

1. Найти производную функций:

а) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{x^2}{4} - \sin x$ в) $y = \ln^2 \sqrt{\cos x}$

б) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 3x}{7x^2} + \arccos 2x$ г) $\ln(xy) + y^2 = 1$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{10}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-x-2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,tg 2x}{1-\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x-3x^4}{x^5+x+3}$

Вариант 25

1. Найти производную функций:

а) $y = \cos 2x \cdot \arccos \dfrac{1}{x}$ в) $y = \operatorname{arctg} 7^{x^2} - 3x + 5$

б) $y = \arcsin(\cos 2x)$ г) $x^2 + y^2 + \sin xy = 4$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cdot tgx$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{2x\, tg 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{3x^4 + x + 3}$

Вариант 26

1. Найти производную функций:

а) $y = 7^{\sin 3x + 5x}$ в) $y = \operatorname{arcctg}(\cos 5x)$

б) $y = \sqrt{\dfrac{\cos 2x}{x}} + \ln 8x$ г) $(x + y^2)^2 + x - y = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos\ 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$

Вариант 27

1. Найти производную функций:

а) $y = \arcsin 2x \cdot \operatorname{tg}(7x + 3)$ в) $y = \sin^8(\sin 3x)$

б) $y = 3^{x^2 + \operatorname{tg} x} - x^3$ г) $x^3 y^2 - (2x + y)^2 + 8 = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{2x})$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 7x + 1}{3x^4 + x + 3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\, tgx}{1 - \cos 4x}$

Вариант 28

1. Найти производную функций:

а) $y = \cos 3x + \sqrt{x^5 + 3}$ в) $y = \ln^2 \dfrac{1}{x}$

б) $y = \operatorname{arctg} 2^x + x^2 - 7x$ г) $x^2 \cdot \sin y + y^3 \cdot \cos x = 0$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{\arcsin^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (ctgx)^{tgx}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4 + 5x^2 - 3x^5}{8 - 6x - x^5}$

Вариант 29

1. Найти производную функций:

а) $y = \frac{\sin 2x}{x^4} - x^7 + 2x$ в) $y = \mathrm{arctg}^2\, 3x$

б) $y = 3^{x^2} \cdot \cos 7x$ г) $x^2 \cdot (x+y)^2 - x + y = 3$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^3 + x^2 + 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln(1+x))^x$

Вариант 30

1. Найти производную функций:

а) $y = \sin 2x + \sqrt{x^3 + 7}$ в) $y = \arccos 3x \cdot \mathrm{ctg}(3x+7)$

б) $y = 2^{x^3 + \mathrm{ctg}\, x} - x^5$ г) $xy = arctg \frac{x}{y}$

2. Вычислить пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 + 3x^2 - x^5}{2x + 3x^2 - 3x^5}$

Расчетно-графическая работа №3
«Исследование функций»

ЗАДАНИЕ. Провести полное исследование функций и построить графики.

Вариант 1	***Вариант 2***
$y=-\frac{x^4}{4}+\frac{5}{4}x^2-1$ $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{4}$ $y=\frac{x^2}{x^2+4}$
Вариант 3	***Вариант 4***
$y=-\frac{x^4}{4}-\frac{13}{2}x^2-\frac{25}{4}$ $y=\frac{x^2-3}{x-2}$	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{29}{4}x^2+25$ $y=\frac{x^2}{x-2}$
Вариант 5	***Вариант 6***
$y=-\frac{x^4}{4}+\frac{17}{2}x^2-\frac{225}{4}$ $y=\frac{3-x^2}{x^3}$	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{17}{4}x^2+4$ $y=\frac{x^2}{x^2+9}$
Вариант 7	***Вариант 8***
$y=-\frac{x^4}{4}+5x^2-16$ $y=\frac{x^2}{1-x^2}$	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{25}{4}x^2+36$ $y=\frac{x^3+1}{x^2}$
Вариант 9	***Вариант 10***
$y=-\frac{x^4}{4}+\frac{41}{4}x^2-100$ $y=\frac{2-x}{(x+1)^2}$	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{37}{4}x^2+9$ $y=\frac{x^2}{x^3+4}$

Вариант 11 $y=-\frac{x^4}{4}+10x^2-36$ $y=\frac{x^2-3}{x^3}$	***Вариант 12*** $y=\frac{x^4}{4}-\frac{45}{4}x^2+81$ $y=\frac{1-x}{(x-2)^2}$
Вариант 13 $y=-\frac{x^4}{4}+13x^2-144$ $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$	***Вариант 14*** $y=\frac{x^4}{4}-\frac{61}{4}x^2+225$ $y=\frac{1+x+x^2}{1+x}$
Вариант 15 $y=-\frac{x^4}{4}+\frac{25}{2}x^2-\frac{49}{4}$ $y=\frac{x^2}{(1+x)^2}$	***Вариант 16*** $y=\frac{x^4}{4}-\frac{53}{4}x^2+49$ $y=\frac{x^2}{1-x^2}$
Вариант 17 $y=-\frac{x^4}{4}-\frac{29}{2}x^2-\frac{441}{4}$ $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	***Вариант 18*** $y=\frac{x^4}{4}-\frac{65}{4}x^2+16$ $y=\frac{1}{x^2-2x}$
Вариант 19 $y=-\frac{x^4}{4}+17x^2-64$ $y=2x+\frac{1}{x}$	***Вариант 20*** $y=\frac{x^4}{4}-\frac{65}{4}x^2+196$ $y=\frac{1+2x}{(x+1)^2}$
Вариант 21 $y=-\frac{x^4}{4}+\frac{101}{4}x^2-25$ $y=\frac{x}{(1-x)^2}$	***Вариант 22*** $y=\frac{x^4}{4}-\frac{41}{2}x^2+\frac{81}{4}$ $y=\frac{x-1}{(2-x)^2}$

Вариант 23	Вариант 24
$y=-\frac{x^4}{4}+\frac{61}{2}x^2-\frac{121}{4}$ $y=\frac{x^3+1}{x^2}$	$y=\frac{x^4}{4}-26x^2+100$ $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$
Вариант 25	**Вариант 26**
$y=-\frac{x^4}{4}+\frac{145}{4}x^2-36$ $y=\frac{1}{1+x^2}$	$y=-\frac{x^4}{4}+2x^2-\frac{9}{4}$ $y=\frac{x^3+1}{x^2}$
Вариант 27	**Вариант 28**
$y=-\frac{x^4}{4}+\frac{9}{2}x^2-\frac{17}{4}$ $y=\frac{x^2+4}{x^2-4}$	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{85}{4}x^2+\frac{169}{4}$ $y=\frac{x^3}{x-2}$
Вариант 29	**Вариант 30**
$y=\frac{x^4}{4}-\frac{85}{4}x^2+81$ $y=\frac{1}{1-x^2}$	$y=\frac{x^4}{4}-\frac{13}{4}x^2+9$ $y=\frac{3x^2-9}{x^2+7}$

Расчетно-графическая работа №4
«Функции нескольких переменных»

ЗАДАНИЕ 1. Показать, что:

Вариант 1.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\ln\left(x^2+y\right)$.
Вариант 2.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\sqrt{2x\,y+y^2}$
Вариант 3.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=x^y$.
Вариант 4.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.
Вариант 5.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Вариант 6.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$
Вариант 7.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.
Вариант 8.	$x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=x\,e^{-\frac{y}{x}}$.
Вариант 9.	$2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$ для функции $z=2\cos^2\left(x-\frac{y}{2}\right)$.
Вариант 10.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.
Вариант 11.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\cdot\cos y$.
Вариант 12.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$ для функции $z=\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$.
Вариант 13.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
Вариант 14.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$ для функции $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.
Вариант 15.	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=\frac{y}{y^2-a^2\,x^2}$.

Вариант 16.	$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2}{x-y}$ для функции $z=\dfrac{x\,y}{x-y}$.
Вариант 17.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\ln\left(x^2+y\right)$.
Вариант 18.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\sqrt{2x\,y+y^2}$
Вариант 19.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=x^y$.
Вариант 20.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.
Вариант 21.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Вариант 22.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$
Вариант 23.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.
Вариант 24.	$x\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=y\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ для функции $z=x\,e^{-\frac{y}{x}}$.
Вариант 25.	$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$ для функции $z=2\cos^2\left(x-\dfrac{y}{2}\right)$.
Вариант 26.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$.
Вариант 27.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=e^x\cdot\cos y$.
Вариант 28.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x^2}$ для функции $z=\ln\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$.
Вариант 29.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ для функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.
Вариант 30.	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0$ для функции $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

ЗАДАНИЕ 2. Исследовать на экстремум:

Вариант 1. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2.$	**Вариант 2.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
Вариант 3. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6.$	**Вариант 4.** $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3.$
Вариант 5. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	**Вариант 6.** $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
Вариант 7. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	**Вариант 8.** $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
Вариант 9. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	**Вариант 10.** $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
Вариант 11. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	**Вариант 12.** $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
Вариант 13. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	**Вариант 14.** $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
Вариант 15. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$	**Вариант 16.** $z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$
Вариант 17. $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2.$	**Вариант 18.** $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
Вариант 19. $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6.$	**Вариант 20.** $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3.$
Вариант 21. $z = x^2 - 8x - 10y + xy + y^2 + 17.$	**Вариант 22.** $z = 4x + 5y - x^2 - xy - y^2 + 4.$
Вариант 23. $z = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4.$	**Вариант 24.** $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
Вариант 25. $z = 13y + 11x - xy - x^2 - y^2 + 5.$	**Вариант 26.** $z = 6x - 8y - x^2 - y^2 - 17.$
Вариант 27. $z = x^2 - 2x + 1 + 2y^2.$	**Вариант 28.** $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1.$
Вариант 29. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$	**Вариант 30.** $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулай Т.А., Жукова В.А., Мелешко С.В., Невидомская И.А. Математика (рабочая тетрадь) // Международный журнал экспериментального образования. Москва. 2015. № 2-2. С.255-256.

2. Долгополова А.Ф., Гулай Т.А., Литвин Д.Б. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 2 // Международный журнал экспериментального образования. Москва. 2012. № 2. 81-82 с.

3. Долгополова А.Ф., Колодяжная Т.А. Руководство к решению задач по математическому анализу. Часть 1 // Международный журнал экспериментального образования. Москва. 2011. № 12. 62-63 с.

4. Шершнев В.Г. Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 288 с. (Высшее образование: Бакалавриат).

5. Шипачев В.С.Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ